نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری:

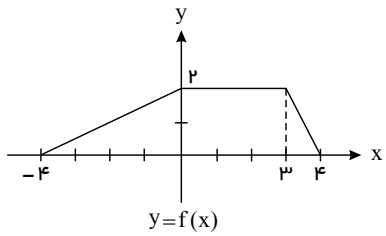
نام آزمون: ریاضی ۳ ترم ۱ مهدوی

تاریخ آزمون:

امیر اسکندری

شهید مهدوی

۱) با استفاده از نمودار تابع $y=f(x)$، نمودار $y=\frac{۱}{۲}f(۴x)$ را رسم کنید.



۲) اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=۲x^۲-۱$ باشد، دامنهٔ تابع $fog(x)$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

۳) ضابطهٔ وارون تابع $g(x)=-۵-\sqrt{۳x+۱}$ را به دست آورید.

۴) اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=۲x^۲-۱$ باشد،

الف) دامنهٔ تابع fog را با استفاده از تعریف به‌دست آورید.

ب) ضابطهٔ تابع، fog را بنویسید.

۵) در جاهای خالی گزینهٔ مناسب داخل پرانتز را انتخاب کنید.

الف) تابع $y=(x+۱)^۳$ در دامنهٔ تعریف خود ..... (صعودی، نزولی) است.

۶) دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید.

$$y=\sqrt{۳}-\cos\frac{\pi}{۲}x$$

۷) به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) معادلهٔ مثلثاتی $\sin x\cos x=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ را حل کرده و جواب‌های کلی آن را بنویسید.

۸) معادلات زیر را حل کنید.

الف) $۲\cos ۲x-\sqrt{۳}=۰$

ب) $۲\cos ۳x+۱=۰$

۹) نشان دهید چندجمله‌ای $f(x)=۲x^۳+۵x^۲-۳x-۱۰$ بر دوجمله‌ای $x+۲$ بخش‌پذیر است.

۱۰) حد توابع زیر را به‌دست آورید.

الف)

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{[x]-۳}{x-۳}$$

ب)

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{\sqrt{x+۱}-۲}$$

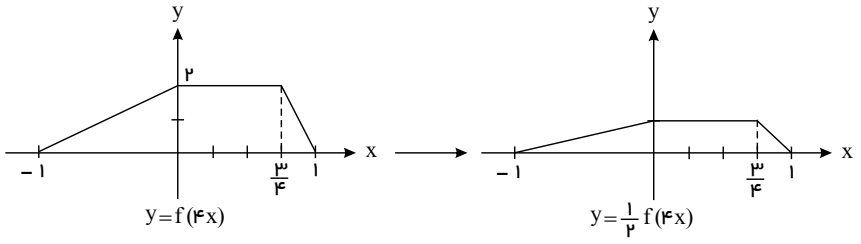
۱۱ حدهای زیر را محاسبه کنید:

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{۴x^{۴}-۲x^{۲}}{-x^{۳}+۲}$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{۵x^{۱۰}-۲x+۳}}{\sqrt{x^{۶}+۲}}$

پاسخ‌نامه تشریحی

۱ کافی است طول نقاط را $\frac{۱}{۴}$ برابر کرده و سپس عرض نقاط را نصف کنیم.



۲

$f(x)=\sqrt{x-۱}\to D_f: x-۱\geq ۰\to x\geq ۱$

$g(x)=۲x^۲-۱\to D_g=\mathbb{R}$

$D_{fog}=\{x|x\in D_g, g(x)\in D_f\}=\{x|x\in\mathbb{R}, ۲x^۲-۱\geq ۱\}=\{x|x\in\mathbb{R}, ۲x^۲\geq ۲\}=\{x|x\in\mathbb{R}, x^۲\geq ۱\}$

$=x\geq ۱$ یا $x\leq -۱=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$

۳

$y=-۵-\sqrt{۳x+۱}\to\sqrt{۳x+۱}=-۵-y\to ۳x+۱=۲۵+y^۲+۱۰y\to ۳x=y^۲+۱۰y+۲۴\to x=\frac{y^۲+۱۰y+۲۴}{۳}$

$\to f^{-۱}(x)=\frac{y^۲+۱۰x+۲۴}{۳}$

۴

الف

$f(x)=\sqrt{x-۱}\to D_f: x-۱\geq ۰\to x\geq ۱$

$g(x)=۲x^۲-۱\to D_g=\mathbb{R}$

$D_{fog}:\{x\in D_g, g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}, ۲x^۲-۱\geq ۱\}=\{x\in\mathbb{R}, ۲x^۲\geq ۲\}=\{x\in\mathbb{R}, x^۲\geq ۱\}=\{x\in\mathbb{R}, x\geq ۱$ یا $x\leq -۱\}=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$

ب

$fog(x)=f(g(x))=\sqrt{۲x^۲-۱-۱}=\sqrt{۲x^۲-۲}$

۵

الف تابع $y=(x+۱)^۳$ در دامنهٔ تعریف خود صعودی است.

۶ دورهٔ تناوب تابع $y=a\cos bx+c$ برابر $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

$T=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۲}}=۴$

$Max=|a|+c=|-۱|+\sqrt{۳}=۱+\sqrt{۳}$

$Min=-|a|+c=-|-۱|+\sqrt{۳}=-۱+\sqrt{۳}$

۷

الف

می‌دانیم که $\sin a\cos a=\frac{۱}{۲}\sin ۲a$ است.

$\sin x\cdot\cos x=\frac{\sqrt{۲}}{۴}\to\frac{۱}{۲}\sin ۲x=\frac{\sqrt{۲}}{۴}\to\sin ۲x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin\frac{\pi}{۴}\xrightarrow{\sin x=\sin\alpha\to\begin{cases}x=۲k\pi+\alpha\\x=۲k\pi+\pi-\alpha\end{cases}}\begin{cases}۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}\to x=k\pi+\frac{\pi}{۸}\\۲x=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۴}\to x=k\pi+\frac{۳\pi}{۸}\end{cases}$

۸

نکته: $\cos u = \cos v \Rightarrow u = ۲k\pi \pm v$

الف) $۲\cos ۲x - \sqrt{۳} = ۰ \Rightarrow \cos ۲x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \cos\frac{\pi}{۶}$

$\Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۱۲}$

ب) $۲\cos ۳x + ۱ = ۰ \Rightarrow \cos ۳x = -\frac{۱}{۲} = -\cos\frac{\pi}{۳} = \cos(\pi - \frac{\pi}{۳})$

$\Rightarrow \cos ۳x = \cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow ۳x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} \pm \frac{۲\pi}{۹}$

۹

$$\begin{array}{l|l} ۲x^۳ + ۵x^۲ - ۳x - ۱۰ & x + ۲ \\ \hline -(۲x^۳ + ۴x^۲) & ۲x^۲ + x - ۵ \\ \hline \quad x^۲ - ۳x - ۱۰ & \\ \quad -(x^۲ + ۲x) & \\ \hline \quad -۵x - ۱۰ & \\ \quad -(-۵x - ۱۰) & \\ \hline \quad ۰ & \end{array}$$

چون باقی‌مانده تقسیم برابر صفر شده در نتیجه $f(x)$ بر $(x + ۲)$ بخش‌پذیر است.

۱۰

الف

$$\lim_{x\to ۳^-} \frac{[x] - ۳}{x - ۳} = \frac{[۳^-] - ۳}{۳^- - ۳} = \frac{۲ - ۳}{۰^-} = \frac{-۱}{۰^-} = +\infty$$

ب

$$\lim_{x\to ۳} \frac{x^۲ - ۹}{\sqrt{x+۱} - ۲} = \frac{۰}{۰} \longrightarrow \lim_{x\to ۳} \frac{x^۲ - ۹}{\sqrt{x+۱} - ۲} \times \frac{\sqrt{x+۱} + ۲}{\sqrt{x+۱} + ۲}$$

$$= \lim_{x\to ۳} \frac{(x+۳)(x-۳)(\sqrt{x+۱} + ۲)}{(x + ۱ - ۴)} = \lim_{x\to ۳}(x+۳)(\sqrt{x+۱} + ۲) = ۶ \times ۴ = ۲۴$$

۱۱

الف) $\lim_{x\to -\infty} \frac{۴x^۴ - ۲x^۲}{-x^۳ + ۲} = \lim_{x\to -\infty} \frac{۴x^۴}{-x^۳} = \lim_{x\to -\infty} (-۴x) = -۴(-\infty) = +\infty$

ب) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{۵x^{۱۰} - ۲x + ۳}}{\sqrt{x^۶ + ۲}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{۵x^{۱۰}}}{\sqrt{x^۶}} = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{۵}x^۲ = \sqrt{۵}(+\infty) = +\infty$